Charlier, Carl Vilhelm
Ludwig
Das planetarische
Rotationsproblem

J. Brandt

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK

UTGIFVET AF

K. SVENSKA VETENSKAPSAKADEMIEN I STOCKHOLM

BAND 4. N:o 27.

AS PLANETARISCHE ROTATIONSPROBLEM

VON

C. V. L. CHARLIER

UPPSALA & STOCKHOLM

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN	LONDON	PARIS
R. FRIEDLÄNDER & SOHN	WILLIAM WESLEY & SON	LIBRAIRIE C. KLINCKSIECK
11 CARLSTRASSE	28 ESSEX STREET STRAND	11 RUE DE LILLE

1908

ARKIV FÖR MATEMATIK, ASTRONOMI OCH FYSIK.
BAND 4. N:o 27.

Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium.

No 39

Das planetarische Rotationsproblem.

Von

C. V. L. CHARLIER.

Vorgelegt am 8. April 1908.

1. Die Rotation eines Planeten, der sich in einer festen Ebene um die Sonne bewegt und der von der Anziehung der Sonne in seiner Rotationsbewegung gestört wird, habe ich in Meddel. No. 32 als das planetarische Rotationsproblem bezeichnet. Ich werde dies Problem hier behandeln unter der Voraussetzung, dass die Bahnkurve des Planeten ein Kreis ist, und dass zwei Trägheitsmomente (A und B) des Planeten einander gleich sind. Die letztere Annahme ist, soviel man weiss, bei allen grossen Planeten (es sei denn, dass Merkur und Venus möglicherweise eine Ausnahme bilden könnten) sehr nahe erfüllt, so dass diese Voraussetzung tatsächlich der Natur entspricht.

Durch die Veränderlichen α_i und u_i des Meddel. No. 31 ausgedrückt hat man für die charakteristische Funktion die Form ($A = B$ angenommen)

$$H = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A}\,\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{2C} + \frac{3}{2}n^2(C-A)\cos^2\gamma\,.$$

Hier ist, wenn die Bahnebene der Planeten als XY-Ebene gewählt wird,

$$\cos\gamma = \sin\theta_0 (\sin u_2 \cos(u_3 - \lambda) - \cos u_2 \sin(u_3 - \lambda)\cos\varepsilon) -$$
$$- \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin(u_3 - \lambda) .$$

Die Grösse λ bedeutet die Länge der Planeten um 180° vermehrt. Sie ist eine Funktion der Zeit, die aus der Theorie der Planeten als bekannt vorausgesetzt werden kann. Geschieht die Bewegung in einem Kreis, hat man

$$\lambda = nt + \text{Konstante}.$$

Da λ immer in der Kombination $u_3 - \lambda$ vorkommt, kann man die Zeit aus der charakteristischen Funktion eliminieren, wenn man die neuen Veränderlichen

$$\alpha'_3 = \alpha_3 ; \quad u'_3 = u_3 - \lambda$$

einführt und die charakteristische Funktion

$$H' = H + \alpha_3 \frac{d\lambda}{dt} \tag{2}$$

benutzt. Die neuen Veränderlichen sind auch kanonisch.

Die Grösse $\cos\gamma$ schreibt man in der Form

$$\begin{aligned} \cos\gamma = &- \cos\theta_0 \sin\varepsilon \sin u'_3 \\ &+ \sin\theta_0 \frac{1+\cos\varepsilon}{2} \sin(u_2 - u'_3) \\ &+ \sin\theta_0 \frac{1-\cos\varepsilon}{2} \sin(u_2 + u'_3) . \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$\left\{ \begin{aligned} \cos^2\gamma = A_0 &+ A_1 \cos u_2 + A_2 \cos 2u_2 + A_3 \cos 2u'_3 \\ &+ A_4 \cos(u_2 - 2u'_3) + A_5 \cos(u_2 + 2u'_3) \\ &+ A_6 \cos(2u_2 - 2u'_3) + A_7 \cos(2u_2 + 2u'_2) \end{aligned} \right. \tag{3}$$

und hier ist

$$A_0 = \frac{1}{2}\sin^2\theta_0 + \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon - \frac{3}{4}\sin^2\theta_0 \sin^2\varepsilon,$$

$$A_1 = \sin\theta_0 \cos\theta_0 \sin\varepsilon \cos\varepsilon ,$$

$$A_2 = -\frac{1}{4}\sin^2\theta_0 \sin^2\varepsilon ,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\sin^2\varepsilon + \frac{3}{4}\sin^2\theta_0 \sin^2\varepsilon,$$

$$A_4 = -\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varepsilon\frac{1+\cos\varepsilon}{2},$$

$$A_5 = +\sin\theta_0\cos\theta_0\sin\varepsilon\frac{1-\cos\varepsilon}{2},$$

$$A_6 = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0\left(\frac{1+\cos\varepsilon}{2}\right)^2,$$

$$A_7 = -\frac{1}{2}\sin^2\theta_0\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{2}\right)^2,$$

wo

$$\cos\theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

$$\cos\varepsilon = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Nimmt man in H' nur die ersten zwei Glieder

$$\frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A}\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{2C}$$

mit, so erhält man für α_1, α_2, α_3 und u_3 konstante Werte und für u_1 und u_2 die Ausdrücke

$$u_1 = \frac{C-A}{A}\frac{\alpha_1}{C}t + \beta_1,$$

$$u_2 = -\frac{\alpha_2}{C}\left(1+\frac{C-A}{A}\right)t + \beta_2,$$

Die Zentralachse ist im Raum unveränderlich ($u_3 =$ Constans), beschreibt aber im Körper einen zirkularen Kegel um die z-Achse in einer Periode gleich

$$2\pi : \frac{C-A}{A}\frac{\alpha_1}{C}.$$

Das ist die EULER'sche Periode. Wenn θ_0 sehr klein ist und folglich α_1 nahe gleich α_2 ist, so kann die Länge dieser Periode berechnet werden, wenn die Abplattung des Planeten $(C-A):A$ bekannt ist.

2. Die Bewegungsgleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial u_1}, & \dfrac{du_1}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_1}, \\[2ex] \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial u_2}, & \dfrac{du_2}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_2}, \\[2ex] \dfrac{d\alpha'_3}{dt} = \dfrac{\partial H'}{\partial u'_3}, & \dfrac{du'_3}{dt} = -\dfrac{\partial H'}{\partial \alpha_3} \end{cases}$$

sind ganz von derselben Form, wie die Bewegungsgleichungen im Drei-Körper-Problem, nur etwas einfacher, weil *erstens* hier das Integral $\alpha_1 =$ Constans vorhanden ist, so dass das Problem auf zwei Freiheitsgrade reduziert werden kann, und *zweitens* die Störungsfunktion eine *endliche* Zahl von Gliedern enthält.

Ganz wie in der Störungstheorie können wir hier von *sekularen, langperiodischen* und *kurzperiodischen* Störungen sprechen.

Die sekularen Störungen werden erhalten, wenn man aus der Störungsfunktion die schnell veränderlichen Glieder ausscheidet und die übrigen beibehält. Das Argument u_2 kann als kurzperiodisch betrachtet werden. Es hat eine Periode gleich der Rotationszeit des Planeten. Der Teil von H', der zu sekularen Gliedern Veranlassung gibt und den ich mit $[H']$ bezeichne, hat also die Form

$$[H'] = \frac{\alpha_2^2}{2C} + \frac{C-A}{A}\,\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{2C} + \alpha'_3 n + $$
$$+ \frac{3}{2} n^2 (C-A)(A_0 + A_3 \cos 2u'_3),$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right) - A_3,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha'^2_3}{\alpha_2^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\right).$$

Die entsprechenden Bewegungsgleichungen lassen sich auf einen Freiheitsgrad reduzieren und sind ganz von derselben Art wie die Gleichungen für das DELAUNAY'sche Problem. Sie können also streng integriert werden. Da einer meiner Zuhörer, Herr Dr. ZINNER, augenblicklich mit dieser Integration beschäftigt ist, so werde ich mich für den Moment nicht weiter damit aufhalten.

3. Die Bewegungsgleichungen (4) besitzen zwei strenge Integrale, nämlich

$$
(5) \qquad \begin{cases} H' = h, \\ \alpha_1 = f, \end{cases}
$$

wo h und f zwei Konstanten bezeichnen.

Ich werde untersuchen, inwiefern es möglich ist, aus diesen Integralen einige Schlüsse auf die Stabilitätsverhältnisse der Bewegung zu ziehen.

Wird die Konstante h_1 durch die Gleichung

$$
(6) \qquad C^2 h_1 = 2 C h + \frac{C - A}{A} \alpha_1^2
$$

eingeführt, so hat man

$$
\left(1 + \frac{C - A}{A}\right) \alpha_2^2 + 2 C n \alpha_3 = C^2 h_1 - 3 n^2 C (C - A) \cos^2 \gamma .
$$

Ich nehme an, dass beim Anfang der Bewegung die Rotationsgeschwindigkeit gross ist im Verhältnis zu n. Dann ist h_1 genähert gleich $\alpha_2^2 : C^2$ und somit positiv. Setzt man weiter

$$
(7) \qquad \begin{cases} n = n_1 \left(1 + \dfrac{C - A}{A}\right), \\[2ex] h_1 = h_2 \left(1 + \dfrac{C - A}{A}\right), \\[2ex] m_1 = \dfrac{3 (C - A)}{C} n^2 : \left(1 + \dfrac{C - A}{A}\right) \end{cases}
$$

und bemerkt, dass

$$
\alpha_3 = - \alpha_2 \cos \varepsilon
$$

ist, so hat man

$$
\alpha_2^2 - 2 C n_1 \alpha_2 \cos \varepsilon = C^2 h_2 - C^2 m_1 \cos^2 \gamma .
$$

Endlich setze ich

$$h_3 = h_2 - m_1 \cos^2 \gamma. \tag{8}$$

Die Grösse h_3 ist positiv und liegt zwischen den Grenzen $h_2 - m_1$ und h_2. Das Integral $H' = h$ hat nunmehr die Form

$$\alpha_2^2 - 2Cn_1\alpha_2 \cos \varepsilon = C^2 h_3. \tag{9}$$

Löst man diese Gleichung in Bezug auf α_2 auf, so ist

$$\alpha_2 = C\left\{n_1 \cos \varepsilon \pm \sqrt{h_3 + n_1^2 \cos^2 \varepsilon}\right\}.$$

Da die beiden Wurzeln nicht ineinander übergehen können, wenn nicht die Grösse unterhalb des Wurzelzeichens verschwindet — was nicht vorkommen kann — so kann α_2 nicht das Zeichen wechseln. Ist beim Anfang der Bewegung α_2 positiv, hat man also

$$\alpha_2 = C\left\{n_1 \cos \varepsilon + \sqrt{h_3 + n_1^2 \cos^2 \varepsilon}\right\}.$$

Es lassen sich hieraus die Grenzwerte der Function α_2 ableiten. Es ist in der Tat

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \varepsilon} = -C \sin \varepsilon \left\{n_1 + \frac{n_1^2 \cos \varepsilon}{\sqrt{h_3 + n_1^2 \cos^2 \varepsilon}}\right\},$$

so dass α_2 den grössten Wert für $\varepsilon = 0$ und den kleinsten für $\varepsilon = \pi$ annimmt. Es ist also der

$$\text{Maximalwert von } \frac{\alpha_2}{C} = \sqrt{h_3 + n_1^2} + n_1,$$

$$\text{Minimalwert von } \frac{\alpha_2}{C} = \sqrt{h_3 + n_1^2} - n_1.$$

Nun ist $\alpha_2 : C$ nach Meddel. No. 31 gleich der Rotationsgeschwindigkeit ω um die Zentralachse. Die obigen Ausdrücke geben uns die Grenzwerte dieser Rotationsgeschwindigkeit. Die grösste Variation in der Rotationsgeschwindigkeit beträgt

$$2n_1.$$

Für die *Erde* hat man

$$\frac{2n_1}{\omega} = \frac{2}{366.24} = \frac{1}{183.12},$$

so dass die Rotationszeit der Erde, insofern die Einwirkung der Sonne in Betracht kommt, *immer zwischen den Werten 23 Stunden 56 Minuten und 24 Stunden 4 Minuten (Sternzeit) liegen muss.* Die aus den Veränderungen der Grösse $\cos^2 \gamma$ hervorgebrachte Variation in h_3 ist dabei vernachlässigt worden; man findet aber leicht, dass die Einwirkung dieses Gliedes verschwindend ist. Die Obliquität der Ekliptik — ε — darf dabei einen beliebigen Wert zwischen — 90° und + 90° annehmen.

Auch für θ_0 kann man Grenzwerte ableiten. Man hat nämlich

$$\cos \theta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot$$

Hier ist nach (5) α_1 eine Konstante und folglich ist (vorausgesetzt, dass bei irgend einem Zeitpunkt θ_0 sehr klein ist)

$$1 - \frac{n_1}{\omega_0} < \cos \theta_0 < 1 \, .$$

Für die *Erde* hat man den

$$\textit{Minimalwert} \text{ von } \cos \theta_0 = 1 - \frac{1}{366} = 0.9973 \, .$$

Der Winkel θ_0 zwischen der Zentralachse und der in der Erde festen z-Achse kann also — insofern die Einwirkung der Sonne auf die Rotation in Betracht kommt — niemals mehr als 4°,2 betragen.

Dagegen lassen sich nicht in dieser Weise Grenzen für die Grösse ε ableiten. Kann vielleicht infolge der Störungen diese Grösse alle Werte zwischen + 90° und — 90° annehmen?

Wir haben also gefunden, dass *die beiden Integrale $H' = h$ und $\alpha_1 = f$, die im planetarischen Rotationsproblem stattfinden, strenge Schlussfolgerungen in Bezug auf die absoluten Grenzen der Grössen α_2 und θ_0 zu ziehen erlauben.* Die Variationsgrenzen für ε werden aber hieraus nicht bestimmt.

4. Wir haben gefunden, dass die charakteristische Funktion H' im planetarischen Rotationsproblem die folgende Form hat

$$
\begin{aligned}
H = A_0 &+ A_1 \cos u_2 + A_2 \cos 2u_2 \\
&+ A_3 \cos 2u'_3 + A_4 \cos (u_2 - 2u'_3) \\
&+ A_5 \cos (u_2 + 2u'_3) \\
&+ A_6 \cos (2u_2 - 2u'_3) + A_7 \cos (2u_2 + 2u'_3),
\end{aligned}
$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_7$ von α_1, α_2 und α_3 abhängen. Man leitet für dieselben die folgenden Ausdrücke ab:

$$
\begin{aligned}
A_0 = \frac{\alpha_2^2}{2C} &+ \frac{C-A}{A}\,\frac{\alpha_2^2-\alpha_1^2}{2C} + \alpha_3 n + \\
&+ \frac{3}{4} n^2 (C-A)\left[1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} + 1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} - \frac{3}{2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
A_1 = \frac{3}{2} n^2 (C-A) \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_2} \sqrt{\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)},
$$

$$
A_2 = -\frac{3}{8} n^2 (C-A)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right),
$$

$$
A_3 = -\frac{3}{4} n^2 (C-A)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\right),
$$

$$
A_4 = -\frac{3}{4} n^2 (C-A)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)},
$$

$$
A_5 = \frac{3}{4} n^2 (C-A)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)\sqrt{\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right)},
$$

$$
A_6 = -\frac{3}{16} n^2 (C-A)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2,
$$

$$
A_7 = -\frac{3}{16} n^2 (C-A)\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)^2.
$$

Dies sind die strengen Ausdrücke für die Koeffizienten. In der Praxis können sie bedeutend vereinfacht werden, da $\alpha_2^2 - \alpha_1^2$ als eine sehr kleine Grösse angesehen werden kann.

In vielen Fällen ist es angemessen, die neuen Veränderlichen ξ_i und η_i durch die Gleichungen

$$
(10)\qquad \left|\begin{aligned}
\xi_1 &= \alpha_2 &, \quad \eta_1 &= u_1 + u_2 - u'_3, \\
\xi_2 &= \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 (1-\cos\theta_0), & \eta_2 &= -u_1, \\
\xi_3 &= \alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 (1-\cos\varepsilon) &, \quad \eta_3 &= -u'_3
\end{aligned}\right.
$$

einzuführen, welche Veränderlichen auch kanonisch sind.

Aus diesen Relationen erhält man

$$\frac{1-\cos\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{\xi_2}{2\xi_1},$$

$$\frac{1+\cos\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = 1-\frac{\xi_2}{2\xi_1},$$

$$\frac{\sin^2\theta}{4} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right) = \frac{\xi_2}{2\xi_1} - \frac{\xi_2^2}{4\xi_1^2},$$

und

$$\frac{1-\cos\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = \frac{\xi_3}{2\xi_1},$$

$$\frac{1+\cos\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) = 1-\frac{\xi_3}{2\xi_1},$$

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{4} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\right) = \frac{\xi_3}{2\xi_1} - \frac{\xi_3^2}{4\xi_1^2}.$$

Die Ausdrücke der Koeffizienten A_i durch die Grössen ξ_i und η_i sind hieraus leicht zu erhalten.

5. Bei allen Planeten mit Ausnahme der Erde, die ich hier nicht in Betracht ziehe, ist der Winkel zwischen der Zentralachse und der Figurachse völlig unbekannt und man hat keine Veranlassung anzunehmen, dass sein Wert bei irgend einem Planeten bemerkbar ist. Wir können also $\theta_0 = 0$ annehmen; bemerken aber gleichzeitig, dass diese Annahme nicht *streng* erfüllt sein kann.

Die charakteristische Funktion für das planetarische Rotationsproblem lautet dann

$$(11)\quad H_0 = \frac{\xi_1^2}{2C} - n(\xi_3 - \xi_1) - \frac{1}{2} m \frac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\frac{\xi_3}{2\xi_1}\right)(1-\cos 2\eta_3)$$

und man hat $\xi_1 = \xi_1^0 =$ Konstante, und

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_3}{dt} = \dfrac{\partial H_0}{\partial \eta_3} = m\dfrac{\xi_3}{\xi_1}\left(1-\dfrac{\xi_3}{2\xi_1}\right)\sin 2\eta_3 \\[2ex] \dfrac{d\eta_3}{dt} = -\dfrac{\partial H_0}{\partial \xi_3} = -n - \dfrac{1}{2} m\left(\dfrac{1}{\xi_1} - \dfrac{\xi_3}{\xi_1^2}\right)(1-\cos 2\eta_3). \end{cases}$$

Die strenge Integration dieser Gleichungen habe ich an anderer Stelle ausgeführt. Hier werde ich die Integrationsmethode der Störungstheorie anwenden.

Hier ist m als eine kleine Grösse zu betrachten. In der ersten Annäherung erhalten wir

$$\xi_3 = \text{Konstante} = \xi_3^0$$
$$\eta_3 = -nt - c_3 = \eta_3^0 .$$

In der zweiten Annäherung erhalten wir

$$\xi_3 = \xi_3^0 - \frac{m}{2n} \frac{\xi_3^0}{\xi_1^0} \left(1 - \frac{\xi_3^0}{2\xi_1^0}\right) \cos 2(nt + c_3)$$

$$\eta_3 = -nt - c_3 - \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{\xi_1^0} - \frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}}\right) t + \frac{m}{4n} \left(\frac{1}{\xi_1^0} - \frac{\xi_3^0}{\xi_1^{0\,2}}\right) \sin 2(nt + c_3)$$

Ich setze

$$\xi_1^0 = C\omega ,$$

wo ω die Rotationsgeschwindigkeit um die Zentralachse bezeichnet. Weiter führe ich statt ξ_3^0 den konstanten Wert der Obliquität ein.

$$\xi_3^0 = C\omega (1 - \cos \varepsilon),$$

woraus

$$2\xi_1^0 - \xi_3^0 = C\omega (1 + \cos \varepsilon),$$
$$\xi_1^0 - \xi_3^0 = C\omega \cos \varepsilon$$

so dass

$$\xi_2 = \xi_3^0 - \frac{m}{4n} \sin^2 \varepsilon \, 2(nt + c_3)$$

$$\eta_2 = -nt - c_3 - \frac{m}{2C\omega} \cos \varepsilon \, t + \frac{m \cos \varepsilon}{4n\, C\omega} \sin 2(nt + c_3).$$

Da

$$\eta_3 = u'_3 - u_3 - \lambda = u_3 - \odot$$

so können wir auch statt $nt + c_3$ die Sonnenlänge — $\odot$ — einführen.

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi_3 &= \xi_3^0 - \frac{m}{4n} \sin^2 \varepsilon \cos 2\odot , \\ \eta_3 &= -\odot - \frac{m}{2C\omega} \cos \varepsilon \, t + \frac{m \cos \varepsilon}{4n\, C\omega} \sin 2\odot . \end{aligned} \right.$$

In ξ_3 und η_3 kommt also ein periodisches Glied mit einer Periode gleich der halben Umlaufszeit des Planeten vor. Ausserdem hat man in η_3 ein sekulares Glied — die *Präzession*.

Wir leiten hieraus die Ausdrücke für die EULER'schen Winkel ab. Da $\theta_0 = 0$ ist, so hat man nach Meddel. No. 31 (25)

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi = -u_1 - u_2 = -\eta_1 - \eta_3 \, . \\ \psi = -u_3 \qquad\quad = -\odot - \eta_3 \, . \end{cases}$$

Den Werth von η_1 finden wir aus der Gleichung

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta_1}{dt} = -\dfrac{\partial H_0}{\partial \xi_1} = -\dfrac{\xi_1}{C} + n + \dfrac{m}{2}\dfrac{\xi_3}{\xi_1^2}\left(1 - \dfrac{\xi_3}{\xi_1}\right)(1 - \cos 2\eta_3) = \\ \qquad = -\omega + n + \dfrac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon\,(1 - \cos\varepsilon)\,(1 - \cos 2\eta_3), \end{cases}$$

so dass

$$(14^*)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \text{Konstante} - \omega t + \odot + \dfrac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon\,(1 - \cos\varepsilon)\,t - \\ \qquad\qquad - \dfrac{m}{4C\omega n}\cos\varepsilon\,(1 - \cos\varepsilon)\sin 2\odot \, . \end{cases}$$

Es ist somit

$$(15)\qquad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 - \omega t + \dfrac{m}{2C\omega}\cos^2\varepsilon\, t - \dfrac{m}{4C\omega n}\cos^2\varepsilon\sin 2\odot \, , \\ \psi = \psi_0 + \dfrac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon\, t - \dfrac{m}{4C\omega n}\cos\varepsilon\sin 2\odot \, , \end{cases}$$

wo φ_0 und ψ_0 zwei Konstanten bezeichnen. Es ist zu bemerken, dass man φ in der Form

$$(16)\qquad \varphi = \text{Konstante} + \omega t + (\psi - \psi_0)\cos\varepsilon$$

schreiben kann, welcher Ausdruck zeigt, dass die zwei letzten Glieder in φ (15) nur eine Projektion der Präzession in ψ darstellen.

Die Hauptglieder in der Theorie des planetarischen Rotationsproblems sind also in der Formel

$$\psi = \psi_0 + \frac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon\, t - \frac{m}{4C\omega n}\cos\varepsilon\sin 2\odot$$

enthalten. Der Koeffizient in der *sekularen Präzession* hat den Wert

$$(17)\qquad \frac{m}{2C\omega}\cos\varepsilon = \frac{3}{2}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{n^2}{\omega}\cos\varepsilon .$$

Das periodische Präzessionsglied hat eine Periode gleich der halben Umlaufszeit des Planeten um die Sonne. Der Koeffizient dieses Gliedes ist

$$(17^*)\qquad -\frac{3}{4}\,\frac{C-A}{C}\,\frac{n}{\omega}\cos\varepsilon .$$

Ich berechne unten die numerischen Werte dieser Glieder für die grossen Planeten, insofern eine solche Berechnung möglich ist.

Die *Erde* nehme ich der Übersichtlichkeit wegen auch mit, obgleich für die Rotation dieses Planeten die Attraktion der Sonne nur eine untergeordnete Rolle spielt. Für die Abplattung nehme ich den Wert, den man aus den Beobachtungen über die Präzession der Äquinoktien erhalten hat (aus den Pendelbeobachtungen und aus der Theorie des Mondes hat man bekanntlich etwas grössere Werte für die Abplattung erhalten). Man hat also (TISSERAND: Méc. Cél. II, S. 441)

$$\text{Abplattung der Erde} = \frac{1}{305.6}\,.$$

Mit dem eingehaltenen Annäherungsgrad hat man auch diesen Wert für das Verhältnis $(C-A):C$. Weiter hat man

$$\omega = 366.24\,n\,,$$
$$n = 360° = 1\,296\,000''\,,$$

wenn das tropische Jahr als Zeiteinheit eingeführt wird.

Hieraus erhält man

$$\psi_{\oplus} = \psi_0 + 15''.94\,t - 1''.268 \sin 2\odot\,.$$

Mars. Die Präzession dieses Planeten habe ich in Meddel. Serie II. No. 3, S. 12 berechnet. Ich nehme daraus die Werte

$$n = 689000'',$$
$$\omega = 464600000'',$$
$$\varepsilon = 24^\circ,87,$$
$$\frac{C-A}{C} = 1/220,$$

und leitet hieraus die Formel

$$\vartheta_{♂} = \vartheta_0 + 6'',321\,t - 0'',946 \sin 2\,☉$$

ab.

Hier wie für die folgenden Planeten und für die Erde ist die Zeiteinheit ein tropisches Jahr. Unter ☉ versteht man die Länge der Sonne vom Schwerpunkt des Planeten gesehen.

Für *Jupiter* nehme ich folgende Werte der Konstanten an

$$\frac{C-A}{A} = \frac{1}{15,73} \quad \text{(Bessel)}$$

$$\text{Rotationszeit} = 9^h\,55^m\,26^s$$

$$\varepsilon = 3^\circ\,5' \quad \text{(Delambre)}.$$

Die Obliquität ist bekanntlich aus der Lage der Bahnebene des innersten (GALILEI'schen) Satelliten bestimmt. Für die Rotationszeit hat man ja verschiedene Werte je nach der Wahl der Flecke. Diese Verschiedenheiten spielen indessen eine geringere Rolle für die vorliegende Frage, da der Wert der Abplattung ziemlich unsicher ist.

Aus diesen Werten erhält man

$$\vartheta_{♃} = \vartheta_0 + 0'',993\,t - 1'',051 \sin 2\,\lambda_{♃}.$$

Für *Saturn* nehme ich für die Konstanten folgende Werte an:

$$\frac{C-A}{A} = \frac{1}{10.2} \quad \text{(Bessel, 1835)},$$

$$\text{Rotationszeit} = 10^h\,16^m \quad \text{(A. Hall, 1877)},$$

$$\varepsilon = 28^\circ\,10',7 \quad \text{(Bessel, 1800)}.$$

Die Abplattung ist noch ziemlich unsicher. Die Obliquität ist aus der Lage des Ringes bestimmt.

Für die Präzession des Saturnekvators leitet man hieraus die folgende Formel ab

$$v'_{♄} - v'_{0} = 0''.227\,t - 0''.531 \sin 2\lambda_{♄} .$$

Was die Planeten *Uranus* und *Neptun* betrifft, sind die Werte der Abplattung und der Rotationszeit noch zu unvollkommen bekannt um einen Schluss über die Bewegung der Äquatorsebenen der Planeten zu erlauben. In Bezug auf den Wert von ε werde ich in einer anderen Abhandlung zeigen, dass die Äquatorsebenen dieser Planeten mit grosser Wahrscheinlichkeit mit den Ebenen der Satellitenbahnen der betreffenden Planeten zusammenfallen.

Tryckt den 14 september 1908.

Uppsala 1908. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.

UPPSALA 1908. ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.